退化楕円型偏微分作用素に関する調和解析 (調和解析学と非線形偏微分方程式)

新井, 仁之

数理解析研究所講究録
1059 巻 1998 年 59-70

退化楕円型偏微分作用素に関する調和解析

東北大・理　新井仁之 (Hitoshi ARAI)

1　はじめに

本稿では，複素解析に現れる偏微分方程式の調和解析について述べる．

一変数複素解析に関連した調和解析において最も基本的なものは，単位円板上の関数の解析である．そこでは，主に単位円板内部と境界，すなわち円周が舞台となる．特に，円板内部では，調和関数という関数が非常に重要な役割を果たし，円周上では，フーリエ級数が解析の対象になることが多い．

しかし，多変数になると状況は一変する．最も基本的な領域である $\mathbf{C}^n$ の開単位球 $\mathbf{B}_n$ について考える．まず，単位球内部では，調和関数はあまり重要ではなくなる．その理由はいろいろあるが，たとえば，調和性は双正則写像で不変ではない．調和性に取って代わるのが，不変調和性である．これは，$\mathbf{B}_n$ の Bergman 計量に関するラプラシアン $\tilde{\Delta}_{B_n}$ に対して $\tilde{\Delta}_{B_n}u=0$ を満たす関数である．

もう一つ不変調和関数が単位球上の調和解析に適したものである理由を述べておく．$d\sigma$ を $\partial\mathbf{B}_n$ 上の Haar 測度する．$A(\Omega)$ を $\overline{\Omega}$ 上連続でかつ Ω 上正則な関数全体のなす空間とし，$A(\partial\mathbf{B}_n)=A(\Omega)|\partial\mathbf{B}_n$ とおく．$1\le p<\infty$ に対して H^p_h を $A(\partial\mathbf{B}_n)$ の $L^p(d\sigma)$ ノルムに関する閉包とする．

H^2_h は $L^2(d\sigma)$ の閉部分空間であるから，その直交射影 S を考えることができる．S は Szegö 射影と呼ばれおり，調和解析や多変数複素解析で重要な作用素の一つである．

$1<p<\infty$ に対して，S は $L^p(d\sigma)$ から H^p_h への有界作用素になっていることが知られている (Koranyi-Vagi). しかし，これは $p=1$ の場合は成り立たない．その代わり，一変数の場合，S は調和関数の境界値からなる通常の Hardy 空間 h^1 から H^1_h への有界作用素になっている．

多変数の場合はどうかというと，h^1 から H^1 への有界作用素にはなっていない．しかし，不変調和関数の境界値からなる Hardy 空間 H^1 を考えると，H^1 から H^1_h への有界作用素にはなっている．

H^1 と h^1 は atom 分解するとその違いがはっきりする．h^1 はユークリッド計量から誘導される球面上の計量に関する球を台とする atom からなる．一方，H^1 は球面の CR 構造から定まる楕円体を台とする atom からなっている．h^1 と H^1 は Banach 空間として同形ではない．

ユークリッド・ラプラシアン Δ と $\tilde{\Delta}_{B_n}$ との間には大きな違いがある．それは，Δ が一様楕円型であるのに対して，Δ_{B_n} が境界 $\partial\mathbf{B}_n$のすべての点で退化していることである．

また，境界上の解析も大分異なってくる．単位球の場合，多重フーリエ級数は使えない．その代わり –ということでもないが– 接 Cauchy-Riemann 作用素 $\overline{\partial}_b$ や Kohn Laplacian $\Box_b$ が意味をもってくる．これらの作用素は球面上の部分多様体で退化する楕円型偏微分作用素である．

このように多変数複素解析に関連した調和解析を研究するには，次の二つのタイプの退化楕円型作用素の研究をしなければならない．

1. 境界のすべての点で退化する楕円型偏微分作用素

2. CR 多様体やベキ零 Lie 群上の退化楕円型偏微分作用素

ここでは，1 について述べる．2 については，いろいろな文献があり，それらを参照してもらいたい．([3] は 2 に関するものである．)

2 特異楕円型偏微分作用素

まず，Bergman 計量に関する基本的な事柄を復習しておく．Ω を $\mathbf{C}^n$ の有界領域とする．$A^2(\Omega)$ を正則な $L^2(\Omega)$ 関数の全体とする．これは，Hilbert 空間 $L^2(\Omega)$ の閉部分空間である．その正規直交基底の一つをとり，φ_j とおく．このとき，

$$K(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(z)\overline{\varphi_j(w)}$$

を Ω の Bergman 核という．なお，$K(z,w)$ は $A^2(\Omega)$ の正規直交基底の取り方にはよらないことが知られている．

$$g_{j\bar{k}}(z) = \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \log K(z,z)$$

を Ω の Bergman 計量という．この計量に関する Laplace-Beltrami 作用素を $\tilde{\Delta}_\Omega$ とおく．

$$\tilde{\Delta}_\Omega u(z) = \sum_{j,k=1}^{n} g^{j\bar{k}}(z) \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$$

と表される．ここで $g^{j\bar{k}}(z)$ は $g_{j\bar{k}}(z)$ の逆行列である．

一般に，$g^{j\bar{k}}$ の具体的な表示はわからないが，たとえば，単位球の場合には，次のようであることが計算されている：

<u>単位球 $\mathbf{B}_n$ の場合</u>

$$g^{j\bar{k}}(z) = \frac{1}{n+1}(1-|z|^2)\,[\delta_{jk} - z_j\overline{z_k}]$$

座標変換すると，$\tilde{\Delta}_{B_n}$ の表象は z を境界に近づけると complex normal 方向には $(1-|z|)^2$ のオーダーで退化し，complex tangential な方向には $1-|z|$ のオーダーで退化することがわかる．

一般の領域では，Bergman 計量は計算できないが，$\tilde{\Delta}_\Omega$ の表象が境界においてどの程度のオーダーで退化していくかはわかる．といっても，じつはよくわかっているのは，強擬凸領域と一部の有限形弱擬凸領域だけである．

そこで，このことを動機として，**境界における退化の様子だけがわかっている楕円型作用素をポテンシャル論あるいは調和解析的視点から研究する．**

3 調和測度の問題 – 背景 –

特異楕円型作用素の解析は，不変ポテンシャル論，多変数複素解析，負曲率多様体上の解析などとも関連していて，いろいろなテーマがありうる．ここでは，その中から調和測度の問題について述べることにしたい．

3.1 Δ の場合

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ を有界領域とし，出発点 $z_0 \in \Omega$ の Brown 運動を (B_t, P^{z_0}) とする．ブラウン運動をしている粒子が初めて Ω の境界 $\partial\Omega$ に到達する時間を τ とする．すなわち，

$$\tau = \inf\{t > 0 : B_t \in \partial\Omega\}$$

である．$I \subset \partial\Omega$ に対して，粒子が Ω の境界に初めて到達するときに，I に衝突する確率は

$$\omega^{z_0}(I) = P^{z_0}(B_\tau \in I)$$

である．このとき，ω^{z_0} は $\partial\Omega$ 上の測度になるが，この ω^{z_0} を z_0 に関する調和測度という．調和測度がどのようになっているか，具体的には，たとえば，境界上の Hausdorff 測度とどのような関係になっているかを調べるのが調和測度に関する問題の一つである．

古典的には，境界が滑らか (たとえば，$C^{1+\epsilon}$ 級) であれば，σ を境界 $\partial\Omega$ 上の $n-1$ 次元 Hausdorff 測度としたとき，

$$\omega^{z_0} << \sigma, \quad \sigma << \omega^{z_0}$$

であり，しかも

$$0 < c \le \frac{d\omega^{z_0}}{d\sigma} \le C < \infty$$

であることが知られている．

この事実は，境界の滑らかさがなくなるとどうなるか，という方向への問題を提起し，調和測度と Hausdorff 測度の絶対連続性の問題が研究されるようになった．知られている主な定理は，下記のとおりである．

$\partial\Omega$ が Lipschitz 連続であるとき，$\partial\Omega$ 上の測度 μ が (B_p) **条件を満たす**とは，μ と σ は互いに絶対連続であって，

$$\left(\frac{1}{\sigma(B(x,r))}\int_{B(x,r)}\left|\frac{d\mu}{d\sigma}\right|^p d\sigma\right)^{1/p} \le \frac{1}{\sigma(B(x,r))}\int_{B(x,r)}\left|\frac{d\mu}{d\sigma}\right| d\sigma$$

を満たすことである $(1 < p < \infty)$．ただし，ここで $B(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^n : |x-y| < r\}$ である．Dahlberg は次のことを証明した．

定理 D1 ([6]) $\partial\Omega$ が *Lipschitz* 境界であるならば，$d\omega^{z_0}$ は (B_2) 条件を満たしている．

さらに，もう少し滑らかさがある場合には，やはり Dahlberg により次のことが証明された．

定理 D2 ([7]) $\partial\Omega$ が C^1 境界であるならば，$d\omega^{z_0}$ と $d\sigma$ は，すべての $1 < p < \infty$ に対して，(B_p) 条件を満たしている．

さらに境界の滑らかさが失われた場合は，2 次元のときに限り，次のようなことがわかっている．

$h:[0,\infty) \to [0,\infty)$ を $h(0)=0$ なる増加関数とし，

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf\left\{\sum h(r_j) \ : \ E\subset B(z_j,r_j), r_j \le \varepsilon\right\}\right]$$

とする．たとえば，$h(t)=t^s$ のとき，Λ_h は s 次元 Hausdorff 測度である．

定理 M (Makarov [12]) 次の命題が成り立つような定数 C_1, C_2 が存在する：

(1) $h_1(t) = t\exp\left\{C_1\sqrt{(\log(1/t)\log\log\log(1/t))}\right\}$ とすると任意の単連結領域 $\Omega\subset\mathbf{C}$ に対して，$\omega^{z_0} << \Lambda_{h_1}$ である．

(2) $h_2(t) = t\exp\left\{C_2\sqrt{(\log(1/t)\log\log\log(1/t))}\right\}$ とするとある単連結領域 $\Omega\subset\mathbf{C}$ に対して，$\omega^{z_0}\perp\Lambda_{h_2}$ である．

ここで，なぜ重複対数が現れるかというと，Riemann 写像 φ に対して，$\log\varphi'$ が Bloch 関数になり，その境界挙動が次のようになるからである．b を単位円板 $D\subset\mathbf{C}$ 上の Bloch 関数とする，すなわち

$$\|b\|_B = \sup_{z\in D}(1-|z|^2)|b'(z)| < \infty$$

とする．このとき，

$$\limsup_{r\to 1-}\frac{|b(re^{i\theta})|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\log\log\log\frac{1}{1-r}}} \le C\|b\|_B \quad \text{(Makarov)} \tag{1}$$

定理 M のような精密な結果は 3 次元以上ではわかっていない．しかし，3 次元以上の場合でも，調和測度の研究は進んでおり，これについては，Bourgain [4], Jones-Makarov [10] がある．また，多変数正則函数に対しては，(1) と類似の境界挙動が成り立つ ([1])．

3.2 一様楕円型偏微分作用素の場合

本節では $\Omega = \{x\in\boldsymbol{R}^n \ : \ |x|<1\}$ とする．

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \tag{2}$$

ただし，$a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij}=a_{ji}$, かつある定数 $0<\lambda<\infty$ 存在し，すべての $\xi\in\boldsymbol{R}^n$ と $x\in\Omega$ に対して

$$\lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \lambda^{-1}|\xi|^2$$

を満たしているとする．

このとき，任意の $f \in C(\partial\Omega)$ に対して， $u_f \in C(\overline{\Omega})$ で

$$u_f|\partial\Omega = f, \qquad Lu_f = 0 \quad \text{on } \Omega \text{ (weak sense)}$$

なるものが唯一つ存在することが知られている (Littman-Stampaccia-Weinberger)．このことを使って，L-調和測度は次のように定義される．$z \in \Omega$ を任意にとり固定する．そして，

$$\varphi_z \ : \ C(\partial\Omega) \ni f \longmapsto u_f(z) \in \boldsymbol{R}$$

とすると，φ_z は $C(\partial\Omega)$ 上の正値連続線型汎関数になっていることがわかる．したがって，Riesz-Markov-Kakutani の表現定理により，$\partial\Omega$ 上の Radon 測度 ω_L^z で

$$u_f(z) = \varphi_x(f) = \int_{\partial\Omega} f(\zeta) d\omega_L^z(\zeta) \qquad \forall f \in C(\partial\Omega)$$

なるものが唯一つ存在する．この ω_L^z を L-調和測度という．

ω_L^z と σ ($\partial\Omega$ 上の $n-1$ 次元 Hausdorff 測度) との関係について知られている結果を紹介しておく．まず，古典的には，係数 a_{ij} が $C^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ であれば，ω_L^z と σ は互いに絶対連続であることがわかる．しかし，

定理 CFK (Caffarelli-Fabes-Kenig [5]) $\omega_L^z \perp \sigma$ となる $a_{ij} \in C(\Omega)$ が存在する．

そこで，どのような条件があれば，ω_L^z は σ と絶対連続になるか，という問題が考えられる．少なくとも，a_{ij} が十分滑らかであれば，絶対連続であるので，問題は a_{ij} が十分滑らかな係数からどれだけ離れていれば絶対連続性が保たれるかということに問題が帰着される．

L_0, L_1 を 2 を満たす L^∞ 係数の一様楕円型偏微分作用素とする．$A_i(x) = (a_{ij}(x))$ $(i = 0, 1)$ とし，$\delta(z) = \inf\{|z - \zeta| \ : \ \zeta \in \partial\Omega\}$,

$$a(z) = \sup_{y:|y-z|<\delta(z)/2} |A_0(y) - A_1(y)|$$

とおく．

定理 D3 (Dahlberg [8]) $a(z)^2 \dfrac{dz}{\delta(z)}$ が *vanishing Carleson* 測度 (後注 *1* 参照) であるとする．このとき，もし，$\omega_{L_0}^z$ が (B_p) 条件を満たしているならば，$\omega_{L_1}^z$ も (B_p) 条件を満たしている $(1 < p < \infty)$.

この定理で vanishing Carleson 測度という条件を Carleson 測度に緩めたらどうなるだろうか．これについては，次の定理がある．

定理 FKP (Fefferman-Kenig-Pipher [9]) $a(z)^2\dfrac{dz}{\delta(z)}$ が *Carleson* 測度 (後注 *2* 参照) であるとする．このとき，もし，$\omega_{L_0}^z$ がある $1 < p < \infty$ に対して (B_p) 条件を満たしているならば，ある $1 < p' < \infty$ が存在し，$\omega_{L_1}^z$ は $(B_{p'})$ 条件を満たしている．

ここで，次の疑問が生ずる：

特異楕円型作用素の場合はどうなるか

次節では，この問題について考える．

4 特異楕円型調和測度

本節で述べる結果は，いくつかの私の論文に散在しているものをまとめたものである．詳しくは，[1], [2] を参照してほしい．

$(\mathcal{R}, h)$ を $d+1$ 次元の向き付けられた Riemann 多様体とし, M を $\mathcal{R}$ 内の C^∞ 級の有界領域で, その境界を ∂M とする．$\overline{M} = M \cup \partial M$ とし，$\zeta \in \partial M$ に対して N_ζ で ζ の ∂M に関する内向きの単位法線ベクトルとする．よく知られているように, ある正数 R が存在して, $\varphi(t,\zeta) = \exp_\zeta(tN_\zeta)$ は $(t,\zeta) \in [0,R) \times \partial M$ から ∂M の近傍 $V(\partial M) \subset \overline{M}$ の上への C^∞-微分同相写像になっている．$0 < r < R$ に対して, $V_r(\partial M) = \varphi([0,r) \times \partial M)$ とおく．$x \in V(\partial M)$ に対して, $(\delta(x), b(x)) = \varphi^{-1}(x) \in [0,R) \times \partial M$ と表すことにする．$x \in M$ と $X \in T_{b(x)}(\overline{M})$ に対して, $P_x^{b(x)}X$ により X を曲線 $\{\varphi(t,x) : t \geq 0\}$ に沿って $b(x)$ から x に平行移動したものとする．$x \in V(\partial M)$ に対して $N_x = P_x^{b(x)}N_{b(x)}$ とし, $\mathcal{N}$ を $\{N_x : x \in V(\partial M)\}$ で生成される $V(\partial M)$ 上の real line bundle とする．本節を通して, $T\overline{M}|_{V(\partial M)}$ の次の分解を仮定する：

<u>仮定.</u> $T\overline{M}|_{V(\partial M)}$ のある C^∞ 級の部分束 T^0 と T^1 が存在し,
(i) $T\overline{M}|_{V(\partial M)} = T^0 \oplus T^1$
(ii) $\mathcal{N} \subset T^0$, $P_x^{b(x)}(T^i_{b(x)}) \subset T^i_x$, $i = 0, 1$
を満たす. $m \geq 1$ を T^0 の rank とする.

ST_x^i で $X \in T_x^i$ かつ $h(X,X)=1$ を満たすベクトル全体を表す.

$$\mathcal{K} = \left\{ K \in C^1(V(\partial M)\cap M) : \sup_{x\in V(\partial M)\cap M} \left(|K(x)| + \frac{\|\nabla_h K(x)\|_h}{|\log \delta(x)|} \right) < \infty \right\}$$

ただし, $\|\nabla_h K(x)\|_h$ は $K(x)$ の h に関する gradient のノルムである. $V(\partial M)\cap M$ で定義された二つの関数 f_1, f_2 に対して, $f_1 = \mathcal{O}(f_2)$ なる記号によって, ある $K \in \mathcal{K}$ が存在して, $f_1(x) = K(x) f_2(x)$, $x \in V(\partial M)\cap M$ が成り立つことを表すことにする.

定義 1 D を $V(\partial M)\cap M$ 上の C^2 関数で $D>0$ なるものとする. M 上の Riemann 計量 g が (δ, D)-型であるとは, ある正数 C とある正値関数 $a \in C^2(V(\partial M))$, そして, テンソル束 $(\mathcal{T}^1)^* \otimes (\mathcal{T}^1)^*$ の対称, 正定値 C^2 cross section Q が存在し, すべての $x \in V(\partial M)\cap M$ に対して, 下記の (i) ~ (iv) が成り立つことである:

(1) $\delta(x)^2 g_x(X,Y) = a(x) h_x(X,Y) + \mathcal{O}(\delta(x))$, $X, Y \in ST_x^0$,

(2) $D(x)^2 g_x(X,Y) = Q_x(X,Y) + \mathcal{O}(\delta(x))$, $X, Y \in ST_x^1$,

(3) $D(x)^2 g_x(X,Y) = \mathcal{O}(1)$, $X \in ST_x^0$, $Y \in ST_x^1$,

(4)

$$g_x(X,X) \geq C \left[\frac{1}{\delta(x)^2} h_x(\Pi_x^0 X, \Pi_x^0 X) + \frac{1}{D(x)^2} h_x(\Pi_x^1 X, \Pi_x^1 X) \right], \ X \in T_x M$$

ただし, Π_x^i は $T_x\overline{M}$ から T_x^i への h に関する直交射影である ($i = 0, 1$).

g を (δ, D)-型計量とする. 以下, D に次の仮定を課す:

$$\sup_{x\in V(\partial M)\cap M} \left\{ \left| \frac{\delta(x)}{D(x)} ND(x) \right| + \left| \frac{\delta(x)^2}{D(x)} NND(x) \right| \right\} < \infty, \tag{3}$$

$$XD(x) = \mathcal{O}(\delta(x)), \quad \forall X \in C^\infty(TV(\partial M)) \text{ s.t. } h(X,N)=0,\ h(X,X)=1 \tag{4}$$

$$D(\varphi^{-1}(\delta(x), b(x))) \leq Const. D(\varphi^{-1}(\delta(x)/2, b(x)))$$

Example 1. M を $\mathcal{R} = \mathbb{C}^n$ $(2n = d+1)$ 内の C^∞ 境界をもつ有界領域とし, $\mathcal{T}^0$ を complex mormal bundle とする. g を M 上の Bergman 計量とし, M を強擬凸とすると C. Fefferman の結果から直ちに g が $(\delta, \delta^{1/2})$-型計量であることがわかる.

Example 2. $\lambda \in C^\infty(\mathcal{R})$, $d\lambda(x) \neq 0$ $(x \in \partial M)$, $M = \{x \in \mathcal{R} : \lambda(x) > 0\}$ とする. このとき, $g = (1/\lambda^2)h$ は (δ, δ)-型計量である.

このほかにも, Nagel-Stein-Wainger 計量をはじめ例はいろいろ考えられる ([2]).

g を M 上の (δ, D)-型計量とし, 条件 (3), (4) を満たしているものとする. M 上の 2 階楕円型偏微分作用素

$$L(u) = \operatorname{div}(A(\nabla u)) + \langle B, \nabla u \rangle, \tag{5}$$

について考えることにする. ただし, div, ∇ は g に関する発散と gradient であり, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は TM 上の g に関する内積, B は $\overline{M}$ 上の C^2 ベクトル場, そして A は $\operatorname{End}(T\overline{M})$ の対称な C^2 cross section で, ある正定数 γ が存在し,

$$\gamma \langle \xi, \xi \rangle \leq \langle A_x(\xi), \xi \rangle \leq \gamma^{-1} \langle \xi, \xi \rangle, \tag{6}$$

がすべての $(x, \xi) \in TM$ に対して成り立っているものとする. また, $\sup_{x \in M} \langle B, B \rangle < \infty$ も仮定する.

特に, A が恒等作用素で $B = 0$ のとき, $L = \operatorname{div}(\nabla u)$ は g の Laplacian となる. これを Δ_g と書く.

(5) の L が coercive であるとは, ある正定数 c が存在し, すべての $u \in C_0^\infty(M)$ に対して

$$\int_M \{\langle A\nabla u, \nabla u \rangle - \langle uB, \nabla u \rangle\} dv_g \geq c \int_M \{\langle u, u \rangle + |u|^2\} dv_g, \tag{7}$$

が成り立つことである. ただし, dv_g は g に関する測度である. L が coercive のとき, (7) の成り立つような c の上限を $c(L)$ で表すことにする.

$$E(x) = (d + 1 - m) \frac{\delta(x)}{D(x)} ND(x), \ \ x \in V(\partial M) \cap M$$

とおく.

定理 2 L を (5) なる作用素とする. また $L_0 u = \operatorname{div}(A\nabla u)$ とする. もし, ある $r_0 \in (0, R)$ とある正数 ε が存在して

$$-(m+1) + \varepsilon \leq E(x), \ \ x \in V_{r_0}(\partial M) \tag{8}$$

が成り立っていれば, L_0 は coercive である. また, $\sup_{x \in M} \langle B_x, B_x \rangle < 2c(L_0)$ であれば, L も coercive である.

前掲の例は条件 (8) を満たしている.

以下 g は (8) も満たしているものとする．また, L は (5) を満たし, かつ coercive であるとする．

$\alpha > 0$ に対して, $\zeta \in \partial M$ が α 点であるとは, ζ のある近傍 V とある正定数 C_ζ が存在して, $D(x) \le C_\zeta \delta(x)^\alpha$ がすべての点 $x \in V \cap M$ に対して成り立つような点である．たとえば, Example 1 の場合, 境界点はすべて 1/2 点である．

定理 3 (1) $\partial\Omega = P_{1/2}$ の場合, Ω 上の恒等写像は, $\overline{\Omega}$ から Ω の L に関する *Martin* コンパクト化の上への同相写像に拡張でき，しかも *Martin* 境界のすべての点が極小になっている．

(2) $\mathcal{R}$ はユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ であるとする．$\partial\Omega = P_\alpha$, $0 < \alpha < 1/2$ の場合，$P_\alpha \backslash P_{1/2}$ の連結成分の閉包が，ある超平面に含まれているならば，Ω 上の恒等写像は，$\overline{\Omega}$ から Ω の L に関する *Martin* コンパクト化の上への同相写像に拡張でき，しかも *Martin* 境界のすべての点が極小になっている．

特に $\mathcal{R} = \mathbb{C}^n$ で M を有界強擬凸領域, そして g を Bergman 計量とする．このとき, g は $(\delta, \delta^{1/2})$-型計量であるから定理 3 (1) が適用できる．これは J. C. Taylor が Lect. Notes in Math. 1344 (1987) の中で提出した問題に対する肯定的な解を与えている．

以後は，定理 3 の (1) または (2) の仮定を満たしているものとする．このとき L-調和測度 ω_L^x が存在する．$o \in M$ を任意に取り, 固定し, $\omega_L = \omega_L^o$ と表す．$0 < R_0 < R$ を十分小さく取っておけば, $B_g(\varphi(t,\zeta),1) \subset V(\partial M)$ がすべての $\zeta \in \partial M$ と $0 < t < R_0$ に対して成り立つ．ただし, $B_g(y,1)$ は中心 y 半径 1 の g に関する測地球である．それ故, $\zeta \in \partial M$ と $0 < t < R_0$ に対して

$$\Delta(\zeta,t) = \{b(x) : x \in B_g(\varphi(t,\zeta),1)\} \subset \partial M$$

が定義できる．次の定理が成り立つ．

定理 4 ある正定数 C_1 が存在し,

$$\omega_L^x(\Delta(b(x),\delta(x))) \ge C_1 > 0,$$

がすべての $x \in V_{R_0}(\partial M) \cap M$ に対して成り立つ．

この定理を Example 1 に対して適用すれば, 定理 4 は Müller - Wolniewicz の問題の肯定的な解答になっている．

定理 4 を使うと調和測度の評価が得られるのだが，それを述べるために少し記号を準備する．$V(\partial M)\cap M$ 上の実数値関数 f に対して，$f_+(t) = \sup\{f(x) : \delta(x) = t\}$, $f_-(t) = \inf\{f(x) : \delta(x) = t\}$, $t > 0$. とする．$\omega_L(\Delta(\zeta,t))$ の評価として次が成り立つ:

定理 5 $L = \Delta_g$ とする．各 $\zeta \in \partial M$ とすべての $t \in (0, R_0)$ に対して，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_2}\int_0^t \exp\left\{-\int_\lambda^1 (m-1+E_+(s))\,\frac{1}{s}ds\right\}\frac{1}{\lambda}d\lambda \\ \le\ & \omega_L\,(\Delta(\zeta,t)) \\ \le\ & C_2\int_0^t \exp\left\{-\int_\lambda^1 (m-1+E_-(s))\,\frac{1}{s}ds\right\}\frac{1}{\lambda}d\lambda, \end{aligned}$$

ここで，C_2 は h, M, g, L にのみ依存した正定数である．

この定理より下記のことがわかる．

定理 6 $\alpha \in [1/2, 1]$ とし，$D(x) = \delta(x)^\alpha$ $(x \in V(\partial M)\cap M)$ とする．また，$L = \Delta_g$ であるとする．このとき ω_L と ∂M 上の h から導入される測度 $d\sigma$ とは互いに絶対連続である．しかも $d\omega_L/d\sigma$ と $d\sigma/d\omega_L$ は $d\sigma$ に関して本質的に有界である．

後注

1. <u>vanishing Carleson 測度.</u> Ω 上の Borel 測度 ν が vanishing Carleson 測度であるとは，

$$\frac{\nu(B(x,r)\bigcap\Omega)}{\sigma(B(x,r)\bigcap\partial\Omega)} \to 0, \qquad \text{unif. in } x \in \partial\Omega \text{ as } r \to 0$$

を満たすことである．

2. <u>Carleson 測度.</u> Ω 上の Borel 測度 ν が Carleson 測度であるとは，

$$\sup_{x\in\partial\Omega, r>0} \frac{\nu(B(x,r)\bigcap\Omega)}{\sigma(B(x,r)\bigcap\partial\Omega)} < \infty$$

を満たすことである．

参考文献

[1] 新井仁之, 多変数複素解析と調和解析, 数学 (日本数学会編集, 岩波), 49 (4) (1997), 337–349.

[2] 新井仁之, 実解析学の発展とその解析学への影響, 数学 (日本数学会編集, 岩波), 50 (1) (1998), 印刷中.

[3] H. Arai, Generalized Dirichlet growth theorem and applications to $\overline{\partial_b}$ and hypoelliptic equations, to appear in Comm. PDE.

[4] J. Bourgain, Hausdorff dimension of harmonic measure in higher dimensions, Inv. Math. 87 (1987), 477–483.

[5] L. Caffarelli, E. Fabes and C. Kenig, Complete singular elliptic harmonic measures, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), 189–213.

[6] B. Dahlberg, On estimates for harmonic measure, Arch. Rat. Mech. Anal. 65 (1977), 272–288.

[7] B. Dahlberg, On the Poisson integral for Lipschitz and C^1 domains, Studia Math. 66 (1979), 13–24.

[8] B. Dahlberg, On the absolute continuity of elliptic measures, Amer. J. Math. 108 (1986), 1119–1138.

[9] R. Fefferman, C. Kenig and J. Pipher, The theory of weights and the Dirichlet problem for elliptic equations, Ann. of Math. 134 (1991), 65-124.

[10] P. Jones and N. Makarov, Density properties of harmonic measure, Ann. of Math. 142 (1995), 427–455.

[11] W. Littman, G. Stampaccia and H. Weinberger, Regular points for elliptic equations with discontinuous coeficients, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 17 (1963), 45–79.

[12] N. Makarov, Distortion of boundary sets under conformal mappings, Proc. London Math. Soc. 51 (1985), 369–384.